De rekenstand in vierstromenland

A. Treffers
M. van den Heuvel-Panhuizen

Inleiding

Een halve eeuw geleden typeerde de Onderwijsinspectie rekenen doodgemoedereerd als 'een stervend vak' – een vak dat onder het geestdodende cijferen dreigde te bezwijken. Rekenmethodes als *Functioneel rekenen* en *Boeiend rekenen* die handig (hoofd)rekenen en schatten vooropstelden, kregen weinig aftrek, dit in tegenstelling tot cijfermethodes als *Naar aanleg en tempo* en *Naar zelfstandig rekenen*.[1)]
Pas in de loop van de jaren '80 kwam de kentering. Uit raadplegingen van ouders, leraren, docenten, onderzoekers en onderwijsbegeleiders bleek toen dat men meer tijd voor hoofdrekenen, schatten en praktische toepassingen wilde reserveren, en het cijferen een minder overheersende positie wenste toe te kennen – een internationale trend die mede door de beschikbaarheid van rekenmachines werd ingegeven. [1] [7]
In Nederland onderstreepte de opkomst van het zogenoemde realistische rekenen deze accentverschuiving: begin jaren '80 verschenen schuchter de eerste rekenmethodes die op de realistische visie waren geënt. Het gevolg was dat zich een tweedeling in het methodebestand aandiende. Een nationale consensus over de richting van het rekenonderwijs was nodig.
In 1984 nam de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs (NVORWO) het initiatief om een nationaal leerplan te ontwikkelen.
In 1989 verscheen de 'Proeve van een Nationaal Programma' [19] waaraan door tientallen deskundigen na consultatie van honderden betrokkenen – leraren basisonderwijs, Pabo docenten, onderwijsbegeleiders, onderzoekers,onderwijsinspecteurs [7] – was gewerkt. De voorlopige eindtermen en wat later de kerndoelen die begin jaren '90 door de overheid voor het rekenonderwijs op de basisschool werden vastgesteld, sloten naadloos bij de doelen van de Proeve aan. [8]
Inzichtelijk en praktisch toepasbaar rekenen waren de kerndoelen van het rekendeel na 1990. Hoe pakte deze vernieuwing uit?
In het volgende zal deze vraag eerst worden beantwoord aan de hand van de rekenresultaten uit de zogenoemde periodieke peilingen van het onderwijsniveau (PPON) die in 1987, 1992, 1997, 2004 en 2011 door het Cito werden uitgevoerd. Doordat de marktaandelen van de realistische methodes in deze periode achtereenvolgens snel opliepen van 15 via 35 en 75 naar 100 procent in 2000, was het tevens mogelijk om eind jaren '90 de opbrengsten van de traditionele methodes met de nieuwe, realistische methodes te vergelijken.

Acht ankersommen	**'87**	**'04**
1. Wilma is 153,6 cm lang. Vorig jaar was haar lengte 146,7 cm. Hoeveel is Wilma sinds vorig gegroeid?	60%	69%
3. Yvonne rekent uit op haar rekenmachine 715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091 Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten. Wat moet het antwoord zijn?	27%	71%
4. In de prijzenpot zit € 6327,75. Er zijn 8 winnaars die dit met elkaar moeten delen Hoeveel geld moet ieder dan ongeveer krijgen? Rond af op honderd euro.	35%	66%
5. Hiemden heeft ruim 50.000 inwoners Een ½% van die inwoners is ouder dan 80 jaar Dat zijn ongeveer …… mensen.	41%	58%
6. Ongeveer ¾ deel van de leerlingen van de Plerikschool komt lopend naar school. Van de rest wordt de helft gebracht en komt de helft op de fiets. Welk deel van de leerlingen van deze school komt op de fiets?	43%	75%
7. De ijscoman heeft berekend dat hij per 10 ijsjes het volgende verkoopt: - 2 bekertjes - 3 hoorntjes - 5 waterijsjes Hij bestelt 700 ijsjes. Welke verdeling houdt hij aan? …. bekertjes …. hoorntjes …. waterijsjes	56%	76%
8. Koptelefoons van € 60,-- nu met 30% korting. Hoeveel moet je nu voor een koptelefoon betalen?	42%	71%

(De eerste vier opgaven móeten uit het hoofd berekend worden en bij de andere mág dat desgewenst.)

Vergelijkende rekenprestaties einde basisschool

Vergelijking individuele PPON resultaten van 1987en 2004 .
We beschikken over de scores van acht opgaven uit 1987 en uit 2004 van individuele toetsafnamen in de periodieke Cito-peilingen. [15] [20].
De voorbeelden zijn ankersommen die model kunnen staan voor het rekenonderdeel dat ze representeren.
Niet alleen de goedscores blijken aanzienlijk te verschillen maar vooral ook de oplossingsmethoden zijn anders. In de peiling van 2004 rekenen de kinderen handiger, met meer inzicht en minder hoofdcijferend.
In opgave 3 bijvoorbeeld, de Yvonne-som, gaf in 1987 één op de drie leerlingen het antwoord 13,091 omdat de meeste getallen drie cijfers achter de komma hebben, terwijl in 2004 één op de tien zo redeneerde.
En bij opgave 8, de kortingsom, rekenden in 2004 twee van de drie leerlingen via ‘10% is gelijk € 6’. Dat deed in 1987 (met guldens) bijna geen enkele leerling. Toen werd nog klakkeloos het 1% - pad gevolgd, dat leidde naar 30 x 0,60 = ..., wat vaak fout werd uitgerekend.
Al met al geeft dit achttal voorbeelden een globale indruk – meer is het niet – hoe het rekenonderwijs er op de betreffende onderdelen voor staat in vergelijking met het ‘traditionele’ tijdperk van de jaren ’80 en ervoor.
Helaas ontbreken vergelijkende opgaven over inzicht in getallen en getalrelaties, een rekenonderdeel waarop sinds 1987 samen met schattend rekenen de grootste vooruitgang is geboekt.
In de lijst staan ook geen vergelijkende scores van het onderdeel ‘bewerkingen’ uit 1987 en 2004. Wel beschikken we over de gegevens van drie toetsitems die in 2004 individueel zijn afgenomen. [15]

‘	**’87**	**‘04**
9. Een boekhandelaar verkocht het afgelopen jaar 704 boekenbonnen van 25 euro. Voor hoeveel euro is dat?	-	71%
10. De Meibloem heeft 32 nieuwe geschiedenisboeken gekocht voor € 736,-- Hoeveel is de prijs per boek?	-	84%
11. De handbalvereniging verzamelt iedere maand oud papier. Vorig jaar verzamelde men 7849 kg. Papier. Hoeveel kg. Is dat gemiddeld per maand? Rond je uitkomst af op een heel getal.	-	60%

In de standaardpeiling bleken de scores aanzienlijk lager. Bijna de helft van de leerlingen berekende deze opgaven uit het hoofd. In de individuele peiling werden de leerlingen echter aangezet om de uitwerking op te schrijven, met het gevolg dat de resultaten toen ruim 20 procent hoger uitkwamen.

‘Ondersteuning voor de interpretatie dat vooral het maken van opgaven zonder uitwerking bepalend is voor de daling in prestaties, kan ook ontleend worden aan de resultaten van de individuele afnamen. Bij deze individuele afnamen maakten leerlingen de opgaven wél met behulp van het opschrijven van een uitwerking. De geleverde prestaties waren aanzienlijk beter, terwijl de strategieën afzonderlijk niet succesvoller waren. Het lijkt er dus op dat zodra de leerlingen een uitwerking opschrijven bij een oplossing van een deelopgave, waartoe ze goed in staat lijken te zijn, de prestaties vanzelf beter uitpakken ’[17, p. 26].

Op dit punt hebben de critici van het bestaande rekenonderwijs het gelijk aan hun kant: de leerlingen moeten meer dan nu vaak gebeurt hun berekening noteren, en de leraar dient er nauwlettend op toe te zien dat ze niet ondoordacht voor hoofdrekenen kiezen, maar ook cijferend rekenen.

Vergelijking leerprestaties uit de standaardpeiling van 2011 en 1987.

	2011 → 1987	
Getalinzicht.	+ 0,80 sd	
Hoofdrekenen (+, –)	+ 0,60 sd	
Schattend rekenen	+ 1,25 sd	
Bewerkingen (+, –)	– 0,65 sd*	
Bewerkingen (x, :)	– 1,15 sd*	
Bewerkingen (algemeen)	– 0,65 sd*	
Toepassingen (rek.mach.)	+ 0,50 sd	
Procenten	+ 0,55 sd	
Verbanden	+ 0,70 sd	(t.o.v. 1997)

(Deze scores komen in hoge mate overeen met de peiling uit 2004.)
Ad *) Als schoolvoorbeeld van de scherpe daling bij ‘bewerkingen’ kan de goedscore van 99 x 99 = ...worden opgevoerd die op 43% uitkomt! Dit voorbeeld toont echter tegelijk aan dat de daling niet zonder meer op de rekening van het cijferen gezet mag worden. Want indien 99 x 99 louter cijferend was opgelost, zou de goedscore ongeveer 30 procent hoger zijn geweest. Alleen heeft 60 % van de leerlingen deze som niet cijferend maar ‘handig’ berekend, en zijn daarbij vaak in de fout gegaan, waardoor de goedscore bij deze aanpak slechts op 35 % uitkwam. Terwijl de 30 % van de leerlingen die het cijferalgoritme wel gebruikte een goedscore van 71 % behaalde. Bij 42 x 52 zien we hetzelfde beeld. Algemeen geldt dat de jongens 40% van de vermenigvuldig- en deelopgaven uit het hoofd berekenen en de meisjes dit in 20 % van de gevallen doen. Het effect hiervan is groot: bij vermenigvuldigen geeft de algoritmische aanpak een gemiddelde goedscore van 68 %, tegenover het hoofdrekenen een opbrengst van 51 % ; bij het delen zijn de scores achtereenvolgens 62 % en 22 % . [10, p. 163]
Dit alles neemt echter niet weg dat de resultaten van het cijferende rekenen sinds 1987 zijn teruggelopen, al is die afname wel aanzienlijk

kleiner dan de genoemde scores van ‘bewerkingen’ doen vermoeden.
Daar komt nog bij dat de cijferresultaten uit 1987 gerelativeerd dienen te worden.
Neem bijvoorbeeld het staartdelen: ‘806 : 26’ behaalde in 1987 weliswaar een goedscore van 85%, maar bij ‘75,6 : 1,4’ was het gemiddelde 60 % en bij ‘1860 : 7,50’ slechts 40 %. En de opgave:
‘Jolien heeft 326 vakantiefoto’s. Er passen 12 foto’s op een pagina. Hoeveel pagina’s heeft Jolien nodig om al die foto’s op te plakken?’
werd 1987 door slechts 30 % van de leerlingen goed opgelost, terwijl een soortgelijke som in de peiling van 2011 een goedscore van 55 % liet zien.

Conclusie.
Hoe men de toe- en afnamen van de resultaten sinds 1987 op de verschillende domeinen wenst te waarderen, hangt in hoge mate af van de waarde die men aan het cijferen in vergelijking met het hoofdrekenen en het schattende rekenen toekent.
Dat de waardering van het cijferen nogal wisselt, valt niet alleen in de geschiedenis van het rekenonderwijs waar te nemen, maar is (internationaal) vooral ook sinds de brede beschikbaarheid van de rekenmachine alom te lezen en in verschillende nieuwe rekenmethodes te zien, waarover nu meer.

Vergelijking leeropbrengsten van vier soorten rekenmethodes

Korte karakteristiek
In het traditionele rekenonderwijs van de periode 1960-1995 zijn twee didactische stromingen te onderscheiden, namelijk die van de procedurele en de functionele methodes.
De procedurele methode, waarvoor *Naar zelfstandig rekenen* (NZR) model kan staan, kenmerkt zich door een sterke gerichtheid op het aanleren van standaardprocedures voor het opereren met gehele getallen, kommagetallen en breuken. Er wordt vrijwel geen tijd voor hoofdrekenen en schatten gereserveerd. Toepassingen zijn eveneens schaars.[20]
De functionele methode *Nieuw rekenen* (NR) zet zich sterk af tegen dit procedurele rekenen. In de Handleiding worden ter vergelijking van deze twee aanpakken – daar aangeduid als ‘schematisch’ en ‘functioneel’ – drie voorbeelden tegenover elkaar gezet.

a. 399 + 865 = … cijferend.	a. 399 + 865 = 400 + 864 = …
b. 8 x 9,75 → 9,75 8 x …	b. 8 x 9,75 = 4 x 19,5 = 2 x 39 = 78. 8 x 9,75 = 8 x 10 – 8 x 0,25 = 80 – 2 8 x 9,75 = 8 x 9 + 8 x 0,75 = 72 + 6
c. 79,2 : 5 → 5 / 79,2 \ …	c. 79,2 : 5 = 2 x 7,92 =

‘Steeds wordt naar middelen gezocht om het gevreesde ‘vercijferen’ te voorkomen.’ [6, p. 13]

Naast hoofdrekenen en schatten besteedt deze functionele methode ook de nodige aandacht aan cijferen. Maar de auteurs voegen daar direct aan toe: ‘Inzichtelijk rekenen, samen met levensecht rekenen zijn evenwel uitgangspunt en doel.’ [6, p. 14].

• Traditionele methodes	Procedurele methode	NZR	0-lijn
	Functionele methode	NR	+ 0,31 sd
• Moderne methodes	Instructief real. methode	WiG	+ 0,53 sd
	Constructief real. methode	PP	+ 0.29 sd

In het moderne rekenonderwijs van de periode 1990-2010 zijn binnen het zogenoemde realistische rekenonderwijs eveneens twee varianten te vinden. Hun gemeenschappelijke realistische karakter wordt, kort gezegd, bepaald door de volgende vijf didactische basisprincipes:
(1) De productieve inbreng van de leerlingen in het onderwijsproces.
(2) Het reflectieve karakter van het onderwijs – leerlingen laten nadenken over hun eigen denk- en rekenwijzen in vergelijking met die van anderen.
(3) Het interactieve rekenonderwijs in een setting waar naast zelfstandig werken gelegenheid is voor instructie en voor interactie tussen leraar en leerlingen, en tussen de leerlingen onderling.
(4) De leraar heeft oog voor de diverse niveaus waarop de leerlingen opereren en probeert hen, zo nodig, met behulp van contexten, modellen, schema’s en methoden naar een hoger abstractieniveau te brengen.
(5) Structuur aanbrengen, betekent dat verwante leergangen met elkaar vervlochten worden en dat toepassingen ook in een projectmatige of thematische samenhang aan de orde kunnen komen.

Een grote keersom

Je hebt de cijfers 2, 4, 8 en 9.
Daarmee ga je vermenigvuldigopgaven maken met twee getallen.
Ieder cijfer mag je één keer gebruiken, bijvoorbeeld zo:
4 x 892
48 x 92
a). Bepaal de vermenigvuldiging met de kleinste uitkomst.
b). Bepaal de vermenigvuldiging met de grootste uitkomst.
c). Hoeveel keersommen van het type 4 x 892 zijn mogelijk?
d). Reken ze allemaal uit. Welke kun je handig berekenen?
e). Bedenk een verhaaltjessom bij 42 x 98.

Deze som kan als model fungeren om de kern van het realistische rekenonderwijs concreet te illustreren: inzichtelijk, probleem georiënteerd en gericht op toepasbaarheid.

In welk opzicht verschillen de instructieve en de constructieve variant van het realistische rekenonderwijs, zoals die zich respectievelijk in de methodes *Wereld in getallen* (WiG) en *Pluspunt* (PP) manifesteren? [2)]
Ten eerste verschillen deze methodes in de organisatievorm van het onderwijs . WiG besteedt vier lessen per week (gedeeltelijk) aan klassikale instructie, en PP slechts twee. Ten tweede, wat de inhoud betreft, stuurt WiG de leerlingen doelgerichter op de (standaard)procedures aan dan PP dat doet, die de teugels met vrije opdrachten als 'doe het op jouw manier' laat vieren. Beide methodes schenken veel aandacht aan hoofdrekenen en schatten. Toepassingen staan bij PP vanaf het aanvangsonderwijs in een aansprekend thematisch verband, bij WiG gebeurt dit vanaf groep 6.

Leereffecten van vier methodes in de eerste drie peilingen.
De cruciale vraag luidt of de vernieuwing van de methodes na 1985 het beoogde effect zou sorteren. De periodieke peilingen van 1987 en 1992 konden nog geen vergelijkende gegevens over de resultaten van de oude en nieuwe methodes verschaffen, omdat de steekproef van de aantallen leerlingen per methode in sommige gevallen te klein was.
Toen bekend werd dat die methodevergelijking na de derde peiling uit 1997 wel mogelijk was, ging de belangstelling speciaal uit naar de prestaties van de oudste realistische methode *Wereld in getallen*. Nu zou moeten blijken wat een beproefde realistische methode waard was.
De uitkomst van de drie periodieke rekenpeilingen is opmerkelijk. [14] [16] WiG scoort op vrijwel alle 24 onderdelen het hoogste. Wat echter vooral in het oog springt is het positieve resultaat ten opzichte van de procedurele methode *Naar zelfstandig rekenen*. Buiten 'bewerkingen', waarop WiG zelfs ook een fractie beter scoort, zijn de verschillen bij de overige twintig onderdelen groot: de goedscores komen 10 tot 20 procentpunten hoger uit. Voor schattend rekenen en het maken van toepassingen is dit grote verschil, gelet op de genoemde nieuwe leerdoelen, wellicht niet zo verrassend. Maar ook bij getalinzicht, hoofdrekenen, breuken, verhoudingen en procenten zijn de verschillen evenzeer aanzienlijk, en dat verraste velen wel. Dit was de bevestiging van de potentiële meerwaarde van de realistische rekendidactiek ten opzichte van de procedurele methodiek – empirische evidentie!
Pluspunt, de grootste methode vanaf eind vorige eeuw, scoorde eveneens beter dan NZR, al was verschil (0,29sd) niet zo groot als bij WiG (0,53sd). Op het onderdeel van het cijferen was het resultaat zelfs iets lager dan van NZR. Alleen bij de twee nieuwe onderwerpen van het schattende rekenen en het inzichtelijk gebruik van de rekenmachine scoorde PP bijna 20 procentpunten hoger. *Nieuw rekenen* boekte vrijwel hetzelfde resultaat.

Conclusie en discussie

De discussie over de kwaliteit van het rekenonderwijs op de basisschool zou aan duidelijkheid winnen, indien ze:
1) niet alleen op het cijferen betrokken wordt,
2) de recente PPON-scores bij 'bewerkingen' niet uitsluitend op het conto van het cijferen zet,
3) de traditionele en moderne methodes niet in twee, maar in vier didactische categorieën opdeelt.
De empirische gegevens van de periodieke rekenpeilingen in de periode 1987- 2011 wijzen uit dat:
1) de resultaten van het niet-cijferende rekenen aanzienlijk zijn gestegen,
2) het cijferen minder is gedaald dan de uitslag bij 'bewerkingen' doet vermoeden,
3) de realistische methodes niet alleen sterk verschillen qua didactische organisatie (lestijd voor klassikale instructie en zelfstandig werken) maar evenzeer in de aandacht die ze aan het cijferen schenken [3)]
De actuele rekenstand (2013) geeft aan dat tweederde deel van de scholen in de afgelopen twee jaar een nieuwe rekenmethode heeft gekozen. Daarvan heeft 95% weer een realistische methode aangeschaft, en 5% een neo-traditionele methode die procedureel gericht is.
Deze verdeling spoort met de uitkomst van de enquête die het Cito in 2011 onder leraren over de door hen gebruikte methode heeft gehouden: '73% van de leraren geeft aan dat de methode goed tot heel goed bij hem / haar past. Slechts 5% van de leraren geeft aan dat de methode niet goed bij hem / haar past.' [17, p. 45]
De kritiek op het realistische rekenonderwijs van de basisschool, blijkt in het basisschool weinig weerklank te vinden, en zeker niet indien die vanuit een a-didactische invalshoek wordt gevoerd.

Noten

1) Het volgende voorbeeld kan model staan voor het veelal 'wereldvreemde' traditionele rekenonderwijs uit de periode 1950 - 1990.

EEN KRANTENKNIPSEL MET FOUTJES

Het kost nogal wat rekenwerk, laten we ons dus beperken tot Nederland. Dat heeft zo'n 14 miljoen inwoners, tegen de VS ruim 3 miljard, 200 keer zoveel. De oppervlakte van Nederland is zo'n 40.000 vierkante meter, tegen de VS 33.000 vierkante kilometer, ongeveer 1000 keer zoveel.

In 1985 werd aan 312 tweedejaars Pabo studenten de rekenvraag voorgelegd om commentaar op het bovenstaande krantenknipsel te geven. Deze studenten met voornamelijk een havo- of vwo-diploma, hadden eind jaren'70 op de basisschool allen nog met een traditionele rekenmethode les gekregen. [12]
De uitslag: 33 procent sloeg het vraagstuk over. De commentaren van de studenten die wel commentaar leverden, waren veelzeggend. Ongeveer 10 procent merkte op dat 3 miljard niet 200 keer zoveel is als 14 miljoen en dat je niet kunt stellen dat 33.000 vierkante kilometer 1000 keer zoveel is als 40.000 vierkante meter. Daarentegen vond 5 procent van de studenten dat die berekeningen wel ongeveer kloppen. En 3 procent noteerde dat die 'ongeveer 1000 keer zoveel' bij de vergelijkingen van de oppervlakten fout is en 'een miljoen keer' moet zijn. Of de Verenigde Staten wel een miljoen keer zo groot als Nederland zou kunnen zijn, werd niet in overweging genomen. Nederland een paar voetbalvelden groot, de Verenigde Staten op het formaat van Nederland met een inwonertal van meer dan de helft van de wereldbevolking – dat alles werd volledig over het hoofd gezien.
Met getallen moet je precies rekenen. Wat ze betekenen…?
Het voornamelijk procedurele rekenonderwijs van de periode 1950-1985 heeft de dwangmatige gerichtheid op de getalsmatige exactheid en het kale rekenen los van de werkelijkheid opgelegd, met het gevolg dat getallen nauwelijks tot leven komen.

2) De term 'constructie' verwijst naar het zogenoemde didactisch constructivisme dat door Freudenthal en anderen werd gekritiseerd, omdat het te zeer naar het uitgangspunt van het zelfontdekkende leren verwijst. Het volgende citaat is in dit opzicht veelzeggend [9, p. 146]:
'Lacking a convincing context, such terms as construction, reconstruction, and constructivism are doomed to remain slogans. The only context that counts didactically is instruction itself, that is, instruction from the direction onwards towards its realisation. If a term is, indeed, needed I prefer *guided* reinvention.'
De kritiek in [2] wordt door ons grotendeels onderschreven.

3) De instructief realistische rekenmethode 'Wereld in Getallen' (eerste 'euroversie') bevat 1250 cijfersommen voor optellen en aftrekken, 1000 voor vermenigvuldigen en 750 deelsommen.
Voor de constructief realistische methode 'Pluspunt' (idem) kan zo'n opsomming niet goed worden gemaakt, omdat hier de leerlingen van meet af de mogelijkheid krijgen de rekenmachine in te zetten. In het eerste blok van het lesboek voor groep 7 bijvoorbeeld staat boven twee sommenrijtjes met opgaven als 5369 + 485 = … en 4223 – 732 = …'Reken uit op jouw manier' ook een symbool dat aangeeft dat sommen met de rekenmachine gecontroleerd mogen worden. Hetzelfde gebeurt met opgaven als opgaven als 37 x 53 = …Het lerarenteam op een school kan er uiteraard voor kiezen om het lesboek op deze punten niet te volgen. Maar ook als dat gebeurt, blijft de hoeveelheid oefenstof beperkt. Overigens is de uitgever van PP door het Freudenthal Instituut op deze (leer)gang van zaken aangesproken. Voor de goede orde dient hier wel nadrukkelijk vermeld te worden dat in de nieuwe euroversie van PP het leren van de standaardprocedures weer een passende plaats krijgt toegewezen.

Referenties

1) Ahlers, J. (1987). Grote eensgezindheid over basisonderwijs. Onderzoek onder leraren en ouders. *School, 15* (4), p. 5-10.

2) Anderson, J.R., C. M .Reder & H.A. Simon (2000). Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education. *Texas Educational Review.*

3) Beusekom, N. van & L. Schuffelers (2002). *Pluspunt.* Den Bosch: Malmberg.

4) Bokhove, J. & J. Janssen (1987). Periodiek peilingsonderzoek in het basisonderwijs. *Panama Post, 6* (1), p. 3-6.

5) Bokhove, J., F. van der Schoot & Th. Eggen (1993). *Balans van het rekenonderwijs aan het einde van de basisschool 2.* Arnhem: Cito.

6) Bruinsma, B. (red.) (1969). *Nieuw Rekenen.* Baarn: Bosch en Keuning.

7) Cadot, J. & D. Vroegindeweij (1986). *10 voor de basisvorming, rekenen-wiskunde onderzocht.* Utrecht: OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht.

8) Die, H. van (2010). De betekenis van de kerndoelen voor de vernieuwing van het rekenonderwijs. *Panama Post*, 29, 4, p. 13-23.

9) Fagginger Auer, M. F. , M. Hickendorff & C. M. van Putten (2013). Strategiegebruik bij het oplossen van vermenigvuldig- en deelopgaven. In: F. Scheltens, B. Hemker & J. Vermeulen, *Balans van het rekenwiskunde-onderwijs aan het einde van de basisschool 5.* (p.158-167). Arnhem: Cito.

10) Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures.* Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

11) Heuvel-Panhuizen, M. van den (2009). *Hoe rekent Nederland?* (oratie). Utrecht: Freudenthal Instituut.

12) Huitema,S., A. van der Klis, M. Timmermans & L. Erich (2002). *De wereld in getallen.* De Bosch: Malmberg.

13) Jacobs, C. (1986). *Rekenen op de Pabo.* Utrecht: OW & OC.

14) Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemker & N. Verhelst (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3.* Arnhem: Cito.

15) Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4.* Arnhem: Cito.

16) KNAW (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Advies*. Amsterdam: KNAW.

17) Putten, C.M. & M. Hickendorff (2006). Strategieën leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Panama Post, 25.* (2), p. 16-25.

18) Scheltens, F., B. Hemker & J. Vermeulen (2013). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool 5.* Arnhem: Cito.

19) Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1. Overzicht einddoelen.* Tilburg: Zwijsen.

20) Wijnstra, J.M. (red.) (1968). *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool 1.* Arnhem: Cito.

21) Zandvoort, R.; H. Venekamp & N. Kuipers (!957/1970). *Naar Zelfstandig Rekenen.* Groningen: Wolters Noordhoff.